

עבודת קיץ לעולים ליב 4 יח"ל – להגשה

אלגברה – חזקות (חזרה על חומר שלמדתם בחטיבה וגם בכיתה יא)

חזקות עם מעריך טבעי

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ פעמים } n$$

הגדרת החזקה:

חוקי החזקות

הנוסחאות: (1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ($a \neq 0$)

דוגמאות:

$$\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$$

$$6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$$

תרגילים:

תשובות	
$a^{11} b^{16}$ (24)	$a^{13} b^{10}$ (23)
1 (27)	a (25)
a^2 (29)	$a^4 b^2$ (28)

$$a^2 b^8 b^7 a^9 b \quad (24)$$

$$a^5 b^3 a^8 b^7 \quad (23)$$

$$\frac{a^3 a^4 a}{a^2 a^6} \quad (27)$$

$$\frac{a^4 a^3}{a^5 a} \quad (25)$$

$$\frac{a^2 b^6 a^7 b^9}{a^3 a^4 b^{10} b^5} \quad (29)$$

$$\frac{a^5 b^2 a^5 b^7}{a^6 b^3 b^4} \quad (28)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (3)$$

הנוסחה:

דוגמא:

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$$

תרגילים:

תשובות	
b (35)	b^{36} (32)

$$\frac{(b^7)^7}{(b^6)^4 (b^3)^8} \quad (35)$$

$$(b^4 b^6)^2 (b^3 b)^4 \quad (32)$$

הנוסחאות: (4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

דוגמאות:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

$$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$$

תרגילים:

תשובות

(38) $a^{12} b^{20}$ (39) $a^{16} b^2$

(41) $\frac{a^{10}}{b^{20}}$ (43) b

(39) $(a^8 b)^2$

(38) $(a^3 b^5)^4$

(43) $\frac{(a^4 b^3)^3 a^6 a^2}{(b^4 a)^2 (a^3)^6}$

(41) $\left(\frac{a^2}{b^4}\right)^5$

חזקות עם מעריך השווה לאפס ועם מעריך שלילי

הנוסחאות: (6) $a^0 = 1$ (7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

(n טבעי, a ו-b שונים מ-0)

דוגמאות:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^3 = 4^3 = 64$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

תרגילים:

תשובות

(10) 3^{-2} (11) $\frac{1}{4}$ (12) $\frac{1}{25}$

(14) $\frac{1}{3^{-3}}$ (15) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (16) $.125$

(18) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ (19) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$ (20) 0^{-5} (21) $.0.027$

(36) $\frac{a^{-3} \cdot a^7 \cdot a^{-9}}{a^{-5} \cdot a^{-1}}$ (37) $\frac{a^{-10} \cdot a^6 \cdot a^{-4}}{a \cdot a^{-5} \cdot a^{-3}}$ (38) $\frac{(a^5)^{-2} (a^6)^6}{(a^{-4})^{-4} a^{13}}$

(39) a (40) a^{-1} (41) a^{-3}

(12) 5^{-2}

(11) 4^{-1}

(10) 3^{-2}

(16) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

(15) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(14) $\frac{1}{3^{-3}}$

(20) 0^{-5}

(19) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$

(18) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

(38) $\frac{(a^5)^{-2} (a^6)^6}{(a^{-4})^{-4} a^{13}}$

(37) $\frac{a^{-10} \cdot a^6 \cdot a^{-4}}{a \cdot a^{-5} \cdot a^{-3}}$

(36) $\frac{a^{-3} \cdot a^7 \cdot a^{-9}}{a^{-5} \cdot a^{-1}}$

חוקי השורשים

הנוסחאות:
$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (2)$$

(n טבעי, $a > 0$, $b > 0$)

דוגמאות:

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

תרגילים:

תשובות		
.10 (34	.6 (33	.14 (32
.5 (37	.3 (36	.2 (35
	.2 (40	.2 (38

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \quad (33)$$

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} \quad (32)$$

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} \quad (36)$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \quad (35)$$

$$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} \quad (40)$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \quad (38)$$

חזקות עם מעריך רציונאלי (שבר)

(n שלם, m טבעי,
 $a > 0$)

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

הנוסחה:

דוגמאות:

$$a^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

תרגילים:

תשובות		
.81 (4	.16 (3	.3 (2
$\frac{1}{11}$ (18	$\frac{1}{32}$ (14	$\frac{1}{3}$ (13
.1 (38	$\frac{1}{5}$ (34	.4 (33

$$27^{\frac{4}{3}} \quad (4)$$

$$64^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

$$9^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$121^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$64^{-\frac{5}{6}} \quad (14)$$

$$27^{-\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$125^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}} \quad (38)$$

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}} \quad (34)$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \quad (33)$$

חזרה על חומר שלמדתם בכיתה יא. – חזרה א

1.

המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+ax}{x+1}$ בנקודה $x = 1$ מקביל לישר $2x - y = 7$.
א. מצא את a .

ב. מצא את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$.

א. 5. ב. $y = 2x + 1$.

2.

הישר $y = 3x + 1$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + ax + 2}{x}$.
א. מצא את נקודת ההשקה.

ב. מצא את a .

א. $(1, 4)$. ב. -2 .

3.

לפונקציות $y = ax^2 + 3$ ו- $y = -\frac{2a}{x}$ יש משיק משותף באותה נקודה ששיפועו -2 .
א. מצא את a ואת נקודת ההשקה המשותפת.

ב. מצא את משוואת המשיק.

א. $a = -1$, $(1, 2)$. ב. $y = -2x + 4$.

4.

לפונקציה $f(x) = \frac{x^2+a}{x^2+x+a}$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה.

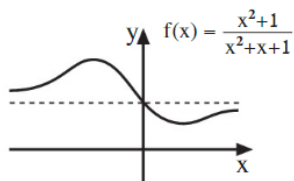
ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = 3f(x) - 1$. מצא את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

ח. שרטט בצורה כללית את הגרף של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

אם ידוע שיש לה בתוך התחום נקודת קיצון אחת בלבד והיא מוגדרת בכל התחום.



- א. 1. ב. $(1, \frac{2}{3})$ מינימום, $(-1, 2)$ מקסימום. ג. $(0, 1)$. ד. $y = 1$. ה. עולה:
 $x < -1$ או $x > 1$, יורדת: $-1 < x < 1$.
 ז. $y = 2$. ח. התשובה לסעיף זה מופיעה בעמ' הבא אחרי התשובה לסעיף ח' של תרגיל 1.

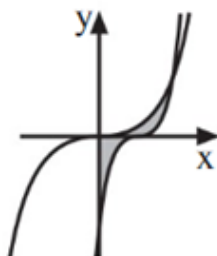
5.

- לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.
 א. מצא את a .
 ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $-10 \leq x \leq -1$ והוכח שהיא אי שלילית בתחום זה.
 ג. האם יש לפונקציה בתחום הנ"ל נקודת מינימום מקומי שאיננה נקודת מינימום מוחלט? נמק.
 ד. מצא בתחום $1 \leq x \leq 4$ את המינימום של הפונקציה.
 ה. הוכח: לכל $1 \leq x \leq 4$ מתקיים: $2 \leq \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8} \leq 2$.
 א. 9. ב. $(-1, 0)$ מינימום מוחלט,
 $(-4, \frac{1}{2})$ מקסימום מוחלט. ג. כן, $(-10, \frac{2}{5})$. ד. 2.

6.

- הנגזרת של פונקציה היא $f'(x) = \frac{8}{(2x-3)^3}$. באחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 8.
 א. מצא את הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 א. $f(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} + 2$. ב. $(0, 1\frac{7}{9})$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.

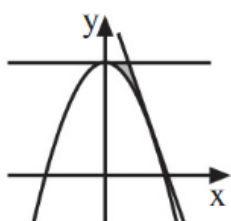
7.



- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות $y = x^3$ ו- $y = (2x-1)^3$ (הדרכה: השווה את שתי הפונקציות והוצא שורש שלישי משני האגפים).
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y .

- א. $(1, 1)$. ב. $\frac{1}{4}$.

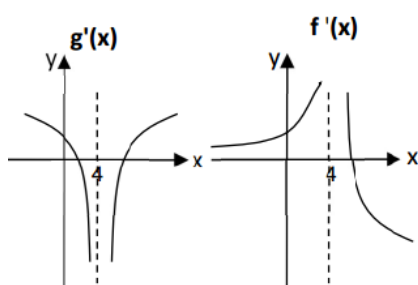
8.



לפרבולה $y = 6 - x^2$ העבירו שני משיקים:
אחד בנקודת המקסימום שלה והשני בנקודה שבה $x = 2$.
א. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הפרבולה ושני המשיקים.

א. $(1, 6)$. ב. $\frac{2}{3}$.

9.



הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 4$.

בציור מתוארים הגרפים של $f'(x)$, $g'(x)$.

א. כמה נקודות קיצון פנימיות יש לכל אחת מהפונקציות נמקי.

ב. נתונה הפונקציה: $h(x) = x + 1 + \frac{9}{x-4}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?

(2) חשבי את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$.

(3) שרטטי סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. אחד מן הגרפים הנתונים בסעיף א הוא גרף הפונקציה $h'(x)$.

(1) קבעי איזה מהם הוא גרף הפונקציה $h'(x)$. נמקי.

(2) חשבי את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $h'(x)$, ציר ה- x והישר $x = 10$.

עבודה נעימה!

חופשה נעימה!